Lahendused ja hindamisjuhis. 02.12.05 9. klassile

Matemaatika LIII olümpiaadi ühtsete ülesannetega koolivooru ülesannetele

Märkus. Lahendusi on esitatud enamasti üks võimalikest. Hindamisjuhis on soovituslikku laadi. Hindamise ühtlustamiseks vaatab esitatud tööd läbi olümpiaadi koolivooru komisjon.

1.ülesanne.
Ruutfunktsiooni $y = -x^2 + 2x + 3$ ja lineaarfunktsiooni $y = -2x + p$ graafikutel on parajasti üks ühine punkt. Leida analüütiliselt (arvutades) parameetri p väärtus. Illustreerida graafikute joonisega.

Vastus. $p = 7$

Lahendus. Kuna ühises punktis on funktsioonide väärtused võrdsed, saame
$-x^2 + 2x + 3 = -2x + p$
$x^2 - 4x + p - 3 = 0$

kuna nõuti, et ühiseid punkte on vaid üks, siis on selle ruutvõrrandi lahendid võrdsed, mistõttu peab ruutvõrrandi diskriminant võrduma nulliga.
$7 - p = 0$ ja $p = 7$
Vastus. $p = 7$
Hindamine:

võrrandi $-x^2 + 2x + 3 = -2x + p$ või vastava võrrandisüsteemi kirjutamine	1p
ruutvõrrandit lahendades jõudmine kujuni kus selgub, et diskriminant on $7 - p$	1p
otsustus ja selgitus, et diskriminant peab võrduma nulliga	2p
õige vastuse $p = 7$ leidmine	1p
ruutfunktsiooni graafiku joonistamine	1p
lineaarfunktsiooni $y = -2x + 7$ graafiku joonistamine	1p

Märkus: kui õige vastus on saadud jooniselt parabooli ja antud tõusuga sirge joonistamisega või proovimise teel ning puuduvad selgitused, siis seda ei saa pidada analüütiliseks lahenduseks ega anda maksimumpunkte vaid ainult kokku 3p.

Lahendused ja hindamisjuhis. 02.12.05 9. klassile

2.ülesanne.
Bogdanov-Belski maalil "Peast arvutamine" on tahvlil murd, mille nimetajaks on lihtaastas olevate päevade arv, aga lugejaks on viie järjestikkuse naturaalarvu ruutude summa. Leida, millised saavad olla need viis järjestikkust naturaalarvu, kui on teada, et vastus, mida õpetaja murru väärtuse kohta ootab, on 2.

Vastus. Need arvud on 10; 11; 12; 13 ja 14

Lahendus. Olgu esimene otsitav naturaalarv x, siis järgmised on x+1; x+2; x+3 ja x+4, ning ülesande tingimuste kohaselt saame võrrandi

$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 + (x+4)^2 = 2*365$, millest

$x^2 + 4x - 140 = 0$

$x = -14$ (ei sobi, sest pole naturaalarv) $x = 10$. Seega on ainult üks naturaalarvude viisik, mis rahuldab ülesande tingimusi ning need on

10, 11, 12, 13 ja 14.

Kontroll: Tõepoolest $(10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2) : 365 = 2$

Vastus. Lugejas saab olla üksnes arvude 10, 11, 12, 13 ja 14 ruutude summa.
Hindamine

Olgu esimene arv x, siis järgmised on x+1; x+2; x+3 ja x+4	1p
Õige murdu sisaldava võrrandi (või kohe $x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2 + (x+4)^2 = 730$) kirjutamine	1p
$5x^2 + 20x - 700 = 0$	1p
$x^2 + 4x - 140 = 0$ (Kui võrrand lahendati ilma taandamata, siis siit jääb punkt saamata)	1p
$x = -14$; $x = 10$ (Kui võrrand lahendati peast, siis ikkagi anda punkt)	1p
–14 (ei sobi, sest pole naturaalarv või ei sobi sisuga või ei sobi või muu samalaadne otsus)	1p
Vastus. Need arvud on 10; 11; 12; 13 ja 14	1p

Märkus. Kui ülesanne on lahendatud ilma võrrandita lihtsalt proovimise teel, aga korrektse põhjendusega siis samuti 7 punkti:
näiteks

$(10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2) : 365 = 2$	3p
Need saavad olla ainsad nõutud järjestikkused naturaalarvud...	1p
..., sest muude järjestikkuste naturaalarvude viisikute ruudud annavad vajalikust 730-st kas väiksema või suurema summa	2p
Vastus. Need arvud on 10; 11; 12; 13 ja 14	1p

Lahendused ja hindamisjuhis. 02.12.05 9. klassile

3.ülesanne.

Tõestada, et a^2 jagamisel arvuga 24 tekib alati jääk 1, kui a on 3-st suurem algarv.

Tõestus.

Eeldus: a on algarv ja $a > 3$

Väide: $a^2 : 24 = n$, jääk 1

Selleks, et $a^2 : 24$ annaks jäägi 1, peab $a^2 – 1$ jaguma 24-ga.

Ehk $(a – 1)(a + 1)$ peab jaguma 24. Kuna $24 = 3*8$, tuleb näidata, et algarvule a eelneva ja järgneva naturaalarvu a–1 ja a+1 korrutis jagub alati nii 8-ga kui ka 3-ga. Ja tõepoolest a –1 ja a+1 on järjestikkused paarisarvud, seega üks neist on ühtlasi arvu 4 kordne ning nende korrutis jagub 8-ga. Kuna **a–1, a ja a+1 on kolm järjestikkust naturaalarvu**, siis üks neist peab olema arvu 3 kordne ning loomulikult pole selleks algarv a. Seega jagub korrutis (a–1)(a+1) ka kolmega ja kokkuvõttes 24-ga, ehk $a^2 : 24$ annab jäägi 1. MOTT.

Hindamine

Selleks, et $a^2 : 24$ annaks jäägi 1, peab $a^2 – 1$ jaguma 24-ga	1p
$a^2 – 1 =(a – 1)(a + 1)$	1p
$24 = 3*8$ (või ka $24 = 2^3*3$)	1p
a–1 ja a+1 on järjestikkused paarisarvud	1p
üks neist on ühtlasi arvu 4 kordne ning nende korrutis jagub 8-ga	1p
kas a–1või a+1 peab olema arvu 3 kordne	1p
(a–1)(a+1) jagub kokkuvõttes 24-ga ehk $a^2 : 24$ annab jäägi 1	1p

Märkus. Kui on piirdutud mõnede juhtumite kontrollimisega, aga üldist tõestust pole esitatud ega alustatud, anda 1 punkt.

Lahendused ja hindamisjuhis. 02.12.05 9. klassile

4.ülesanne.
Ringist otsustati välja lõigata seitse võimalikult suurt ühesuurust ringi. Mitu protsenti suure ringi pindalast jääb kasutamata. Arvuta täpselt! Tee joonis.

Vastus. Kui kõik 7 ringi suurest ringist välja lõigata, siis jääb sellest järele 22,(2)%.

Lahendus.

Näitame, et väikseid ringe saab antud tingimustel joonistada ühe keskele ja kuus ümberringi. Joonistame ringi ja jaotame ta raadiuse kolmeks võrdseks osaks. Saadud lõik sobib täpselt väikeste ringide raadiuseks. Ühe väikese ringi paigutame suure ringiga kontsentriliselt ja teine väikene ring mahub täpselt ta kõrvale. Kolmanda saab panna puutuma nii kesmist kui ka teist ringjoont. Kuna nende kolme väikese ringi keskpunkte ühendavad lõigud moodustavad võrdkülgse kolmnurga, siis tekib suure ringi keskpunkti juurde 60^o kesknurk. Kuna $360^o : 60^o = 6$, siis saame ümber keskmise väikese ringi paigutada täpselt 6 sama suure raadiusega ringi. Seega on selge, et suure ringi sisse saab võimalikult suuri üksteist mittekatvaid ringe paigutada seitse sel juhul, kui väikese ringi raadius on suure ringi raadiusest täpselt kolmandik. Sel juhul on väikese ringi pindala suure ringi pindalast $(1/3)^2 = 1/9$ ja 7 väikest ringi katavad suure ringi pindalast 7/9 ning katmata jääb 2/9 = 22,(2)%

Vastus. Kasutamata jääb 22,(2)% suure ringi pindalast.

Hindamine

Korrektne joonis (Kui joonis on skitseeritud ilma sirlita, siis 0 p)	1p
tõdemus, et väikese ringi raadius on suure ringi raadiusest kolm korda väiksem	1p
põhjendus, et just nii saame seitse maksimaalse raadiusega ringi paigutada suure ringi sisse	1p
tõdemus, et suure ringi pindala on üheksa korda suurem väikese ringi pindalast	1p
tõdemus, et seitse väikest ringi katavad suure ringi pindalast 7/9	1p
ja katmata jääb 2/9	1p
2/9 = 22,(2)% ehk 22 2/9 %	1p

Märkus. Lahendusteid on siin mõistagi palju. Püüdkem hinnata siiski ülaltoodud momentide olemasolu või puudumist. Näiteks kui joonis on korrektne, aga ilma mingi põhjenduseta ja õpilane on probleemi lahendanud hoopis mõõtmise ning ligikaudse arvutamise teel saades 22%, siis oleks vast töö väärt 4 punkti.

5.ülesanne.

Lahendus ja hindamisjuhis lisalehel.